Preparaduría #6 – Circuitos RC y RL

Capacitores < F = Faradios >

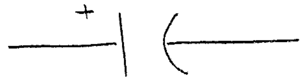
Son elementos pasivos capaces de almacenar energía. La carga entre sus placas depende del voltaje y cuando se están descargando actúan como una fuente de voltaje.

C

ó

C

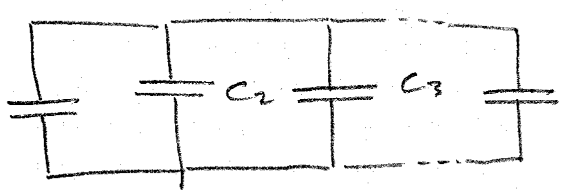
\+



(no polarizado) (polarizado)

- $i_c(t) = C\dfrac{dV_c(t)}{dt}$
- $V_c(t^-) = V_c(t^+)$, el voltaje en un capacitor no puede cambiar bruscamente, por lo tanto, en un instante de tiempo infinitesimal decimos que el voltaje es constante.
- Cuando se alcanza el "estado estable" (ej. "a estado x por mucho tiempo...") el capacitor se comporta como un abierto, es decir, cuando el capacitor se carga llega a un voltaje máx., y como este no cambia $i_c(t) = 0\,A$.
- Cuando el capacitor se descarga el voltaje entre sus terminales es cero.
- La constante τ para un capacitor es $\tau = RC$, donde R es Rth del circuito.

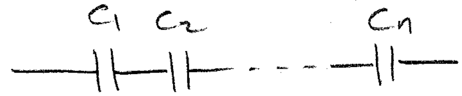
* Capacitancia equiv:



C_1 C_2 C_3 C_n

;

C_1 C_2 C_n

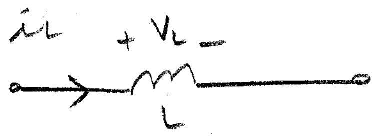


$$C_{equiv} = C_1 + \cdots + C_n \qquad \frac{1}{C_{equiv}} = \frac{1}{C_1} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

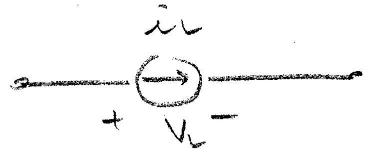
(Al revés que las resistencias)

Inductor < H = Henrios >

Son elementos pasivos capaces de almacenar energía. la cantidad de energía que almacenan. La energía almacenada depende de la corriente que fluye por el selenoide, cuando se están descargando actúan como una fuente de corriente.

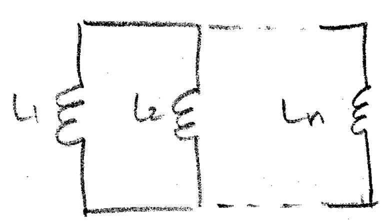


parece*

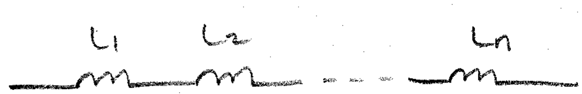


- $V_L(t) = L \dfrac{di_L(t)}{dt}$
- $i_L(t^-) = i_L(t^+)$, la corriente no puede cambiar bruscamente, por lo tanto, en un instante de tiempo infinitesimal decimos que la corriente es constante.
- Cuando se alcanza el "estado estable" el inductor se comporta como un corto, es decir, cuando está muy cargado llega al máx de corriente que puede fluir por el selenoide, y como no cambia $V_L(t) = 0\,V$
- La constante τ para un inductor es $\tau = L/R$, donde R es R_{th} del circuito.

* Inductancia equiv.



;



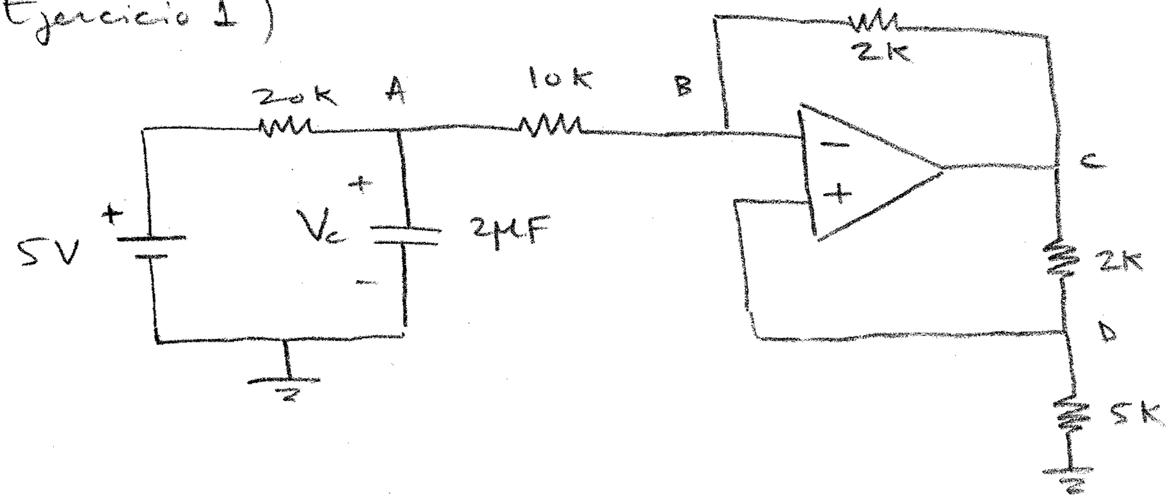
$$\frac{1}{L_{equiv}} = \frac{1}{L_1} + \cdots + \frac{1}{L_n}$$

$$L_{equiv} = L_1 + \cdots + L_n$$

(Igual que las resistencias)

* parece pero no es!

Ejercicio 1)



*) Halle $V_c(t)$ para $t > 0$ si el capacitor se encuentra inicialmente descargado.

Solución:

Nuestro primer paso es hallar las condiciones iniciales de nuestros elementos, en este caso eso significa $t < 0$ seg.

Para $t < 0$

El capacitor está descargado, esto significa que el voltaje entre las terminales del capacitor es cero.

$$V_c(t = 0^-) = 0\,V$$

Recordemos que para instantes muy pequeños de tiempo $V_c(t)$ es el mismo.

$$V_c(0^-) = V_c(0^+) = 0\,V$$

Ya tenemos la condición inicial así que hay que conseguir la expresión del voltaje para el "estado transitorio".

Para $t > 0$

Nodo A

$$\frac{V_A - 5}{20K} + \frac{V_A - V_B}{10K} + \overset{\text{corriente cap.}}{i_c(t)} = 0 \quad ; \quad V_A = V_c(t)$$

Nodo B

$$\frac{V_B - V_A}{10K} + \frac{V_B - V_c}{2K} = 0 \quad ; \quad V_B = V_D \quad (\text{OPAMP})$$

Nodo D

$$\frac{V_D - V_c}{2K} + \frac{V_D}{5K} = 0 \longrightarrow V_D\left(1 + \frac{2}{5}\right) = V_c$$

$$\longrightarrow \boxed{V_c = \frac{7}{5} V_D = \frac{7}{5} V_B}$$

Reemplazamos esto en el nodo B,

$$\frac{V_B - V_A}{10K} + \frac{V_B - \left(\frac{7}{5} V_B\right)}{2K} = 0$$

$$\frac{V_A}{10K} = \frac{V_B}{10K} - \frac{2V_B}{10K} \longrightarrow \frac{V_A}{10K} = -\frac{V_B}{10K} \longrightarrow \boxed{V_A = -V_B}$$

Reemplazamos en el nodo a,

$$\frac{3\,V_c(t)}{20K} + c\,\frac{dV_c}{dt} - \frac{1}{4K} + \frac{V_c(t)}{10K} = 0$$

$$\frac{50\,V_c(t)}{200K} + c\,\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{4K}$$

$$\boxed{\frac{V_c(t)}{4K} + c\,\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{4K}} \longrightarrow$$

Nuestra meta siempre va a ser llegar aquí, todo con una sola var. y su derivada, lo demás deban ser constantes.

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{1 - V_c(t)}{4K \cdot C} \longrightarrow \frac{dV_c}{1 - V_c(t)} = \frac{dt}{4K \cdot C}$$

$$\longrightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{dV_c(t)}{1 - V_c(t)} = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{4K \cdot C}$$

* Los límites los agrego para ahorrarme el paso de buscar el valor de la constante de integración, pero esto es trivial, si quieres no lo haces.

$$\begin{cases} u = 1 - V_c(t) \\ du = -dV_c(t) \end{cases}$$

$$-\int \frac{du}{u} = \frac{t - t_0}{4K \cdot C}$$

$$-\ln(u) = \frac{t - t_0}{4K \cdot C}$$

* Ud. nunca querrá el ⊖ con el "ln(x)", por comodidad yo lo "paso" al otro lado

$$\ln(1 - V_c(t))\Big|_{t_0}^{t} = \frac{t_0 - t}{4K \cdot C}$$

$$\ln\left(\frac{1 - V_c(t)}{1 - V_c(t_0)}\right) = \frac{t_0 - t}{4K \cdot C}$$

* Veamos, nuestro t_0 es 0 seg. y $V_c(0) = 0\,V$

$$\ln(1 - V_c(t)) = -\frac{t}{4K \cdot C}$$

* Inversa de $\ln(x)$ es e^x

$$1 - V_c(t) = e^{-t/4K \cdot C}$$

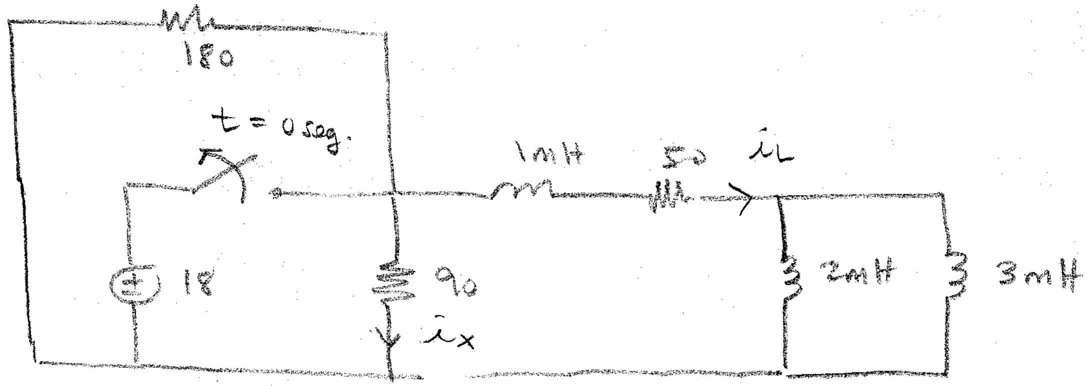
$$V_c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{4KC}}$$

$$\boxed{V_c(t) = 1 - e^{-125t}\ V \quad \text{para } t > 0}$$

* Fíjese que $\tau = 4K \cdot C = 8\,ms$, eso es porque en RC/RL tenemos siempre $e^{-t\left(\frac{1}{\tau}\right)}$.

* Siempre hay que reportar el dominio de t.

Ejercicio 2)

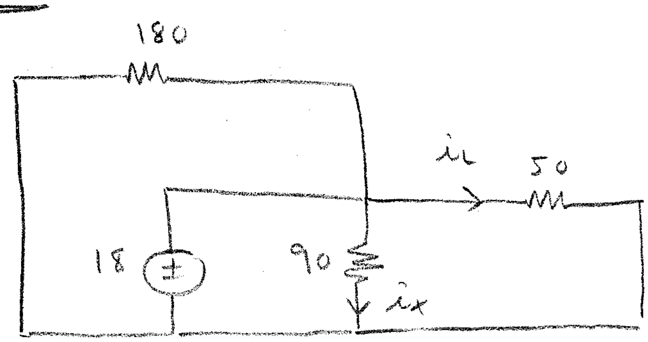


El interruptor ha permanecido cerrado por mucho tiempo y se abre en t = 0 seg. Hallar $i_L(0^-)$, $i_x(0^-)$, $i_L(t)$ para $t > 0$ e $i_x(t)$ para $t > 0$.

Solución:

$$L_{equiv} = L_{2mH} \parallel L_{3mH} = 1{,}2\ mH$$

$t < 0$



* Recordar que para "estado estable" el inductor es un corto.

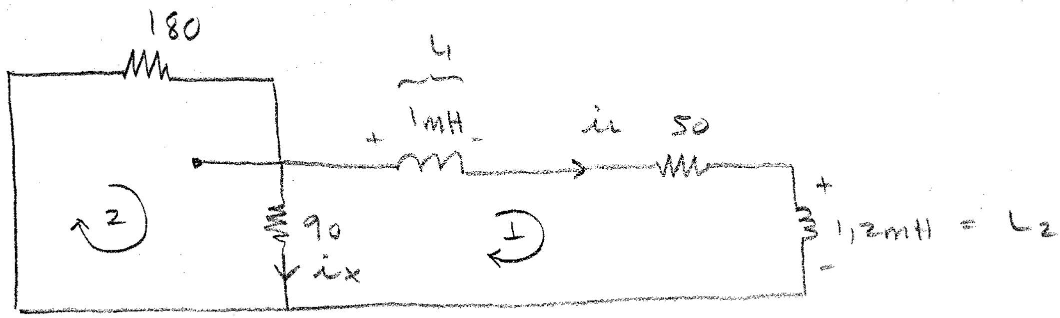
$$i_L = \frac{18}{50} = 0{,}36\ A \quad ; \quad i_x = 0{,}2\ A$$

Recordamos que un inductor posee corriente cte. para instantes de tiempo pequeños (infinitesimales)

$$i_L(0^-) = 0{,}36\ A = i_L(0^+)$$

Esto es solo con el inductor, para todo lo demás tenemos valores que pueden ser distintos.

$\underline{t \geq 0}$



En este caso los inductores van a convertirse en elementos activos y van a suplir de energía al circuito hasta que se descarguen.

Malla 1

$$90 i_1 - 90 i_2 + L_1 \frac{di_L}{dt} + 50 i_1 + L_2 \frac{di_L}{dt} = 0 \quad , \quad i_1 = i_L$$

Malla 2

$$180 i_2 + 90 i_2 - 90 i_1 = 0$$

$$\longrightarrow 270 i_2 = 90 i_1 \longrightarrow \boxed{i_2 = \frac{i_1}{3}}$$

Reemplazamos en la malla 1,

$$90 i_1 - 30 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + 50 i_1 + L_2 \frac{di_1}{dt} = 0$$

$$\longrightarrow 110 i_1 + (L_1 + L_2) \frac{di_1}{dt} = 0$$

$$\longrightarrow 110 i_1 = -(L_1 + L_2) \frac{di_1}{dt}$$

$$\longrightarrow -\int_{t_0}^{t} \frac{110\, dt}{(L_1 + L_2)} = \int_{t_0}^{t} \frac{di_1}{i_1}$$

$$-\frac{110}{(L_1+L_2)}(t - t_0) = \ln\left(\frac{i_1(t)}{i_1(t_0)}\right)$$

* $t_0 = 0$ y $i_1(0) = 0{,}36A$

$$\frac{i_1(t)}{0{,}36} = e^{-\frac{110t}{(L_1+L_2)}}$$

* Comprueba que $\tau = \frac{L}{R}$ y busca su valor ($\tau = 20\mu s$)

* Recordar que $i_1(t) = i_L(t)$

$$\rightarrow \boxed{i_L(t) = 0,36\, e^{-50000t} \ A \qquad \text{para} \quad t \geq 0}$$

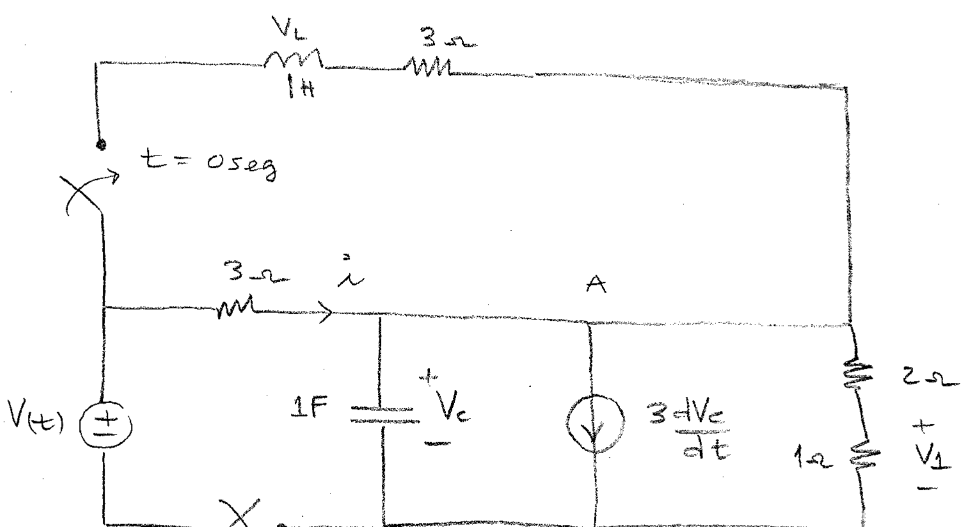
Una buena forma de comprobar nuestro resultado es evaluar esta expresión en "t_0" y que nos de la condición inicial. Si nos da igual puede estar correcto pero a veces uno tiene mala suerte, te da igual pero está malo :(

para $i_x = i_2 - i_1 = i_2 - i_L$

$$i_x = e^{-50000t}\left(\underbrace{\frac{0,36}{3}}_{i_2} - 0,36\right)$$

$$\boxed{i_x = -0,24\, e^{-50000t} \ A \qquad \text{para} \quad t \geq 0}$$

Ejercicio #3)

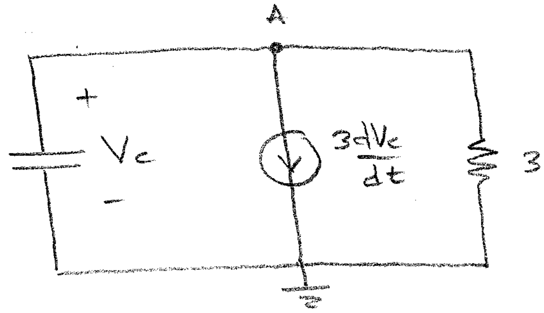


* Hallar:

a) $V(0^+)$, $i_c(0^+)$ y $V_1(0^+)$ si $\frac{dV_c}{dt}(0^-) = -1$ y $i(0^+) = -1A$

b) $V(10^+)$ si en $t = 10$ seg. el cap. e ind. están en "estado estable" y que $V_L(10^+) = 0\,V$ y $V_1(10^+) = 1\,V$

$t < 0$



Nodo A

$$\frac{dV_c}{dt} + 3\frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{3} = 0$$

$$\rightarrow 4\frac{dV_c}{dt} = -\frac{V_c}{3}$$

$$\rightarrow V_c = -12\frac{dV_c}{dt}$$

* pero como sabemos que en $t = 0^-$ seg $\frac{dV_c(0^-)}{dt} = -1$

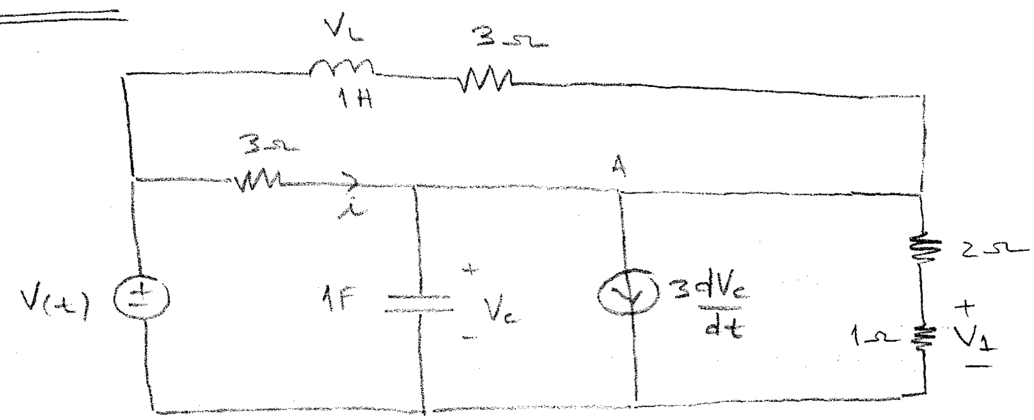
$$\rightarrow \boxed{V_c(0^-) = 12\,V}$$

* otra cosa que podemos sacar de ahí es que $\boxed{i_L(0^-) = 0\,A}$ porque en esa parte del circuito hay un abierto. Por esta misma razón es que pudimos reducir el circuito a esto.

* Recordar que por propiedades de los cap. e ind.:

$$V_c(0^-) = V_c(0^+) = 12\,V$$
$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0\,A$$

$t \geq 0$



* Para empezar este problema es un circuito de segundo orden (RLC) que se ve en redes II (EC2262*), pero no te preocupes, lo podemos resolver si usamos lo que nos han dado (que no es al azar).

* redes II de eléctricos, yo soy ing. eléctrico

Nodo A

$$\underbrace{\frac{V_A - V(t)}{3}}_{-i} + i_L + 3\frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{3} = 0$$

$$\longrightarrow -i + \cancel{C}^{1}\frac{dV_c}{dt} + 3\frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{3} + i_L = 0$$

$$\longrightarrow -i + 4\frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{3} + i_L = 0$$

* Ok, hasta aquí es un problema de redes II, pero tenemos que recordar lo que nos piden, aquí no necesitamos todas las expresiones para $t \geq 0$, solo queremos los datos en $t = 0^+$ seg.) un instante nada más.

$$\longrightarrow 1 + 4\frac{dV_c}{dt} + V_c = 0$$

$$\longrightarrow \int \frac{dV_c}{3 + V_c} = -\int \frac{dt}{12}$$

$$\longrightarrow \ln(3 + V_c) = -\frac{t}{12} + A$$

$$\longrightarrow 3 + V_c = e^{-t/12 + A}$$

$$V_c(t) = K e^{-t/12} - 3$$

$$\hookrightarrow V_c(0^+) = K(e^{-0/12}) - 3 = 12$$

$$\longrightarrow K - 3 = 12 \longrightarrow \boxed{K = 15}$$

$$\boxed{V_c(t) = 15e^{-t/12} - 3 \quad , \quad t > 0}$$

* Recuerda que $i_L(0^+) = 0$ A y $i(0^+) = -1$ A
* Jaja! Ahora es de redes I.
* Vamos a resolver la integral indef. solo para saber cómo se hace así
* $e^{a+b} = e^a e^b$
* $e^A = \text{cte} = K$
* $I_c = C\frac{dV_c}{dt}$

$\longrightarrow I_c = C\frac{dV_c}{dt} = (1)\left(-\frac{15}{12}e^{t/4}\right)$

$$\boxed{I_c(0^+) = -\frac{5}{4}\,A}$$

* Ahora, para hallar $V_1(0^+)$ sabemos que $i_L(0^+) = 0\,A$ así que tenemos al voltaje V_c prácticamente como una fuente de voltaje en serie con las dos resistencias.

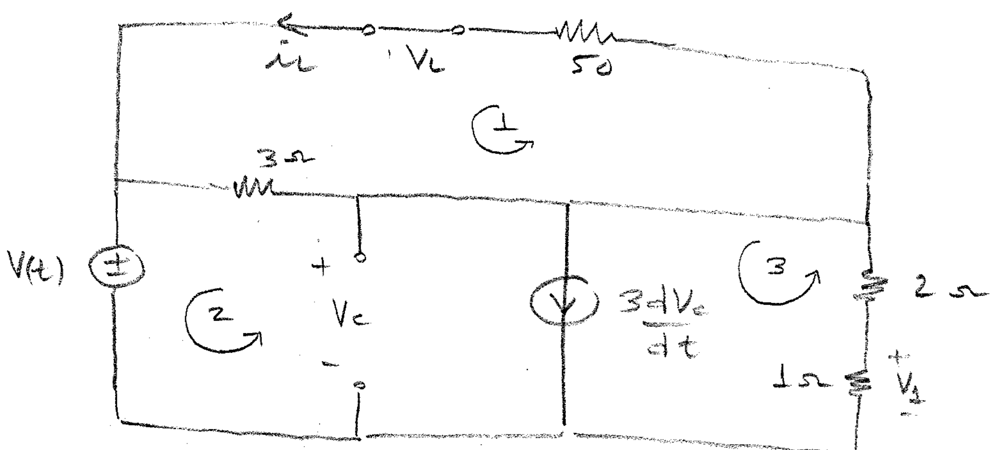
$$V_1(0^+) = \frac{V_c(0^+)\cdot 1}{2+1} = 4V$$ * Div. de voltaje

* Para $V(0^+)$ hacemos LKV:

$$-V(0^+) - 3 + V_c(0^+) = 0$$
$$V(0^+) = -3 + 12 = 9V$$

* Por cierto, esto lo pudimos haber hecho de primero, pero lo dejé de último porque es lo más fácil. Si quieres lo compruebas.

b) $t > 10$ seg.



Esto quedó así porque estamos en estado estable, recordar que el cap. es un abierto y el inductor un corto en estado estable.

Malla 1:

$3i_1 + 3i_1 - 3i_2 = 0 \rightarrow i_2 = 2i_1$

Supermalla 2-3:

$i_3 - i_2 = 3\frac{dV_c}{dt}$; $V(t) + 3i_2 - 3i_1 - V_1 + 2i_3 = 0$

Reemplazamos todo en el recorrido de la supermalla

$$V(t) + 3i_2 - \frac{3}{2} i_2 - 1 + 2\left[\frac{3 dV_c}{dt} + i_2\right] = 0$$

Recordamos ahora que estamos en estado estable, eso significa en este caso que el voltage del capacitor no va a aumentar y por lo tanto no cambia en el tiempo, en pocas palabras $\boxed{\frac{dV_c(10^+)}{dt} = 0}$. También se puede ver así, en estado estable el cap. es un abierto, $i_c(10^+) = 0A$, y $i_c(t) = c\frac{dV_c}{dt}$

$$\longrightarrow \frac{dV_c}{dt} = \frac{i_c(t)}{c} \longrightarrow \frac{dV_c(10^+)}{dt} = \frac{\cancel{i_c(10^+)}^{0}}{c} = 0.$$

Entonces nos queda que,

$$* \quad i_3 - i_2 = \cancel{\frac{dV_c}{dt}}^{0} = 0 \longrightarrow i_3 = i_2$$

$$* \quad V(t) + 3i_2 - \frac{3}{2} i_2 - 1 + 2\left[\cancel{\frac{3 dV_c}{dt}}^{0} + i_2\right] = 0$$

$$\longrightarrow V(t) = -i_2\left[3 - \frac{3}{2} + 2\right] - 1$$

$$\longrightarrow V(t) = -\frac{7}{2} i_2 - 1 \quad ; \quad \boxed{\begin{aligned} V_1 &= -i_3(1) = -i_2 \\ V_1(10^+) &= -i_2 = 1 \\ i_2 &= -1\ A \end{aligned}}$$

$$\longrightarrow \boxed{V(t) = \frac{9}{2} V}$$

Demonos cuenta que nuestro V(t) está definido en el tiempo pero no hay variable que lo haga cambiar, esto reafirma que nos encontramos en "estado estable", que no es más que decir, sin cambios en el tiempo. Entonces,

$$\boxed{V(10^+) = \frac{9}{2} V}$$